問題

$x > 0$ のとき， $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ （n は 0 以上の整数）を証明せよ。

解法

$f(x)=e^x$ とすると，$f(x)$ は x で無限回微分可能だから，

$f(x)=e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots$ とおくと，

$f^{(1)}(x)=e^x=1!a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$

$f^{(2)}(x)=e^x=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}\cdots$

$f^{(3)}(x)=e^x=3!a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+(n+1)n(n-1)x^{n-2}\cdots$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots$

よって，$f(0)=1=a_0$，$f^{(1)}(0)=1=1!a_1$，$f^{(2)}(0)=1=2!a_2$，$f^{(3)}(0)=1=3!a_3$，$\cdots$，

$f^{(n)}(0)=1=n!a_n$

ゆえに，$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots$

これより，$e^x>\frac{x^n}{n!}>0$（n は 0 以上の整数）であることが推測でき，

$\frac{x^n}{n!}>0$ は問題条件より明らかだから，$e^x>\frac{x^n}{n!}$ であることを数学的帰納法で証明する。

つまり，$g_n(x)=e^x-\frac{x^n}{n!}$（$x>0$，$n$ は 0 以上の整数）　・・・①とおき，

$g_n(x)>0$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

【1】$n=0$ のとき

$g_1(x)=e^x-1>0$（$\because x>0$）より，①が成り立つ。

【2】$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると，$g_k(x)=e^x-\frac{x^k}{k!}>0$

$n=k+1$ のとき，$g_{k+1}(x)=e^x-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ より，$\{g_{k+1}(x)\}'=e^x-\frac{x^k}{k!}=g_k(x)>0$

よって，$g_{k+1}(x)$ は単調増加関数である。

これと $g_{k+1}(0)=1$ より，$x>0$ のとき $g_{k+1}(x)>0$ となり，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

【1】,【2】より，①が成り立つ。

以上より，$e^x>\frac{x^n}{n!}>0$（n は 0 以上の整数）が成り立つ。

$e^x>\frac{x^n}{n!}>0$ は 0 以上の任意の整数 n で成り立つから $e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}>0$ が成り立つ。

よって，$0<\frac{1}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}$ より，$0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$

これと $\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$ より，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$